Vortrag transfinite Wahrscheinlichkeitslogik

- **Thema:** Kategorientheorie und W'logik, der Dualitätssatz von Mulkowski

0 min
- **Wiederholung: Kategorien**
  - Kategorie: 5-tupel C = (Ob, Mor, dom, cod, o)
  - Ob: Objekte, z.B. Gruppen, top. Räume
  - Mor: Morphismen („Pfeile"), z.B. Homomorphismen, stetige Fkt.
  - dom, cod: Mor -> Ob — Anfangs- und Endpunkte der Pfeile. Schreibe z.B. f:A -> B, wenn dom(f) = A, cod(f) = B.
  - o ist assoziativ, verknüpft kompatible Morphismen (A o B, wenn dom(A) = cod(B)).
  - Jedes Objekt X in Ob hat einen neutralen Morphismus id_X: X -> X.
  - Beispiele
    - Grp
    - Top
    - Cat
      - In Cat sind die Morphismen die **Funktoren**.
      - Die Objekte in Cat sind die kleinen Kategorien, Cat selbst ist eine große Kategorie.

15 min
- **Mulkowski 1970 (Dualitätssatz)**: Cat (Kat. d. kleinen Kategorien) ist äquivalent zu Prob (Kat. d. kleinen W'ringe).
  - Man beachte den unpassenden Namen (Dualität <-> Äquivalenz).
  - Mulkowski-Funktor
  - Funktoren <-> W'ringhomomorphismen
  - „Das commutative Diagramm, welches die Dualytät beweiset, ist zu zeichnen ein solch Graus, daß dem geneigten Leser die Vorstellung auferlegt sei ... Im übrigen ist mir sonntags stets die Tinte knapp."
  - Morphismen werden als Wahrscheinlichkeitsfolgen dargestellt, weiter zerlegt, auf undurchsichtige Weise wieder zusammengesetzt und zuletzt mittels des Satzes vom primsten Primteiler in Funktoren transformiert.
  - Beweis sehr unschön und komplex
    - scheinbar unnötige Umwege über CoCat (d.h. Cat^op) und CoProb
    - Metafunktoren terminologisch vermischt mit Funktoren als Morphismen, Unterscheidung teilweise unklar (Mulkowski: „it's a feature, not a bug")
    - Implizite Voraussetzungen
      - Einheizkreis ist wohldef. (damals noch ungelöst!)
      - Anwendung des Lemmas vom primsten Primteiler braucht Auswahlaxiom
    - schwache Existenz der Dualität
  - „Wie die Ausgabe eines Brute-Force-Theorembeweisers, nur häßlicher" (Groshirn)
- **Groshirn 1976:** Versuch, den Beweis durch Verallgemeinerung des Begriffs des Funktors zu vereinfachen.
  - „Wahrscheinlichkeitsfunktor" zwischen „Wahrscheinlichkeitskategorien".
  - Mulkowski 1977: „Der Ansatz von Groshirn war ... ohne Zweifel ein völliger Fehlschlag".
  - Streit zwischen Groshirn und Mulkowski um den schöneren Formalismus.
  - Schmitt-Hindemith 1977 (International Journal of Algebraic Probability Logic): Streit „völlig unbegründet, da beide Formalismen gleichermaßen an Unsinn kaum zu überbieten".
  - Daraufhin gemeinsame Arbeit von Mulkowski/Groshirn an Verschönerung des Beweises. (Mulkowski in einem Brief an Groshirn: „Wir werden es diesem aufgeblasenen Tintenfaß schon zeigen.")
- **Mulkowski, Groshirn 1977-1982:** Neuer Ansatz durch Einführung der „Wahrscheinlichkeitstopologie".
  - W'topologie: verallgem. Topologie auf W'ringen -> Theorie der *wahrscheinlichkeitsstetigen Funktionen*.
  - **Groshirns Äquivalenzlemma:** W'stetige Fkt. äquivalent zu W'ringhomomorphismen (d.h. ProbTop ~ Prob) (wichtiges Nebenresultat!)
  - Eigentlicher Beweis mithilfe des Lemmas sehr kurz. (Dieser Vortrag!)

35 min
- **Beweis Dualitätssatz von Mulkowski**
  - Sei C eine kleine Kategorie. Dann gibt es ex. Sequenz C_n von Unterkategorien, C_0 = {nil}, F_n: C_n -> C_{n+1} Funktoren, so daß lim C_n = C und $||C_n||_m < \inf$ für alle n, wobei $||.||_m$ die Church'sche Wahrscheinlichkeitsnorm ist.
    Ziel: Finde eine konvergente ex. Seq. von W'ringen R_n, R_0 = {0} mit einem Grenzwert R so, daß stets $|R_n| = |C_n|$ und zusätzlich $||R_n||_m = ||C_n||_m$.

40 min
    - Sei Ci eine Kategorie. Wähle einen Wahrscheinlichkeitsring Ri = (Ob(Ci), +, *, P) mit

      a + b := a^max(deg(a), deg(b)) (+) b^min(deg(a), deg(b))
      a * b := a^min(deg(a), deg(b)) x b^max(deg(a), deg(b)),
      P := λ

      wobei deg := deg_Ci (nicht deg_Ri!). |Ri| = |Ci| ist klar, Exaktheit der Sequenz ergibt sich aus Wahl der

W'ringhomomorphismen. Zeige noch: ||Ri||_m = ||Ci||_m. Sei dafür f: Ri -> R_i+1 eine nichtkonst. wahrscheinlichkeitsstetige Funktion (existiert, weil ||Ci||_m < \inf und damit ||Ri||_m < \inf).

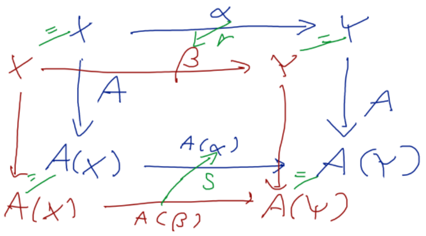
- 1. ||Ri||_m <= ||Ci||_m:
  Angenommen, ||Ri||_m > ||Ci||_m. Dann gäbe es a, b mit ||a * b||_m_Ri > max(||a||_m_Ci, ||b||_m_Ci). Widerspruch zur Def. von *.
- 2. ||Ri||_m <= ||Ci||_m:
  Angenommen, ||Ri||_m < ||Ci||_m. Dann gäbe es a, b mit ||a + b||_m_Ri < min(||a||_m_Ci, ||b||_m_Ci). Widerspruch zur Def. von +.

- Setze A(C) := R. (Grenzwert ex. wegen ||R_n||_m = ||C_n||_m < \inf.)

- Zeige: A ist wohldef., d.h. R eindeutig bestimmt bis auf Isomorphie (Übung. Zeige, daß es für jedes mögliche P oben einen W'ring (R', P) gibt, so daß (R', P) =~ (R, λ))

50 min
- Zeige zuletzt, daß A eine Äquivalenz von Kategorien ist.
  - Funktorialität ist klar.
  - *A voll:* Sei η ε Mor(A(X), A(Y)).
    Betrachte n := ||η||_m (falls endlich, sonst wende so lange den Zerlegungssatz von Binomi an, bis die Komponenten jeweils endlich sind und behandle diese jeweils einzeln).
    Aus der Definition von A folgt, daß es nur endl. (sagen wir m) viele Morphismen q in Prob geben kann, für die ||q||_m = n ist. Wegen Groshirns Äquivalenzlemma und Stetigkeitssatz über große Kategorien gilt dasselbe für Cat. Zeigt man nun m_Cat_n = m_Prob_n für alle n, ist man wegen Treue (s.u.) fertig.
    Sei n in N. Angenommen, m_Cat_n > m_Prob_n. Dann müßte wegen Dualität sogar gelten m_Cat_n >= m_Prob_n + 2. Nach dem Lemma vom primsten Primteiler müßte dann m_Cat_n bereits m_Prob_n und wegen Monotonie sogar jedes m_Prob_k für k in N teilen. Das bedeutet insbesondere m_Prob_0 > 1, was nicht sein kann.
    => m_Cat_n <= m_Prob_n.
    m_Prob_n <= m_Cat_n folgt analog.

60 min
  - *A treu:* A_XY(α) = A_XY(β)
    α = β folgt aus folgendem kommutat. Diagramm:



    mit r := sup{x in Card}(Φ_x^2 - Φ_x), s := inf{x in Card}(- Φ^−1_x^2 + Φ^−1_x), wobei Φ_x der zu A duale beschränkte Zyklenfunktor ist.

70 min
  - *A wesentlich surjektiv:* Sei R kleiner W'ring. Dann R := R1 + R2 + ... Zerlegung in homog. Komponenten. Sei Ri homogen. Dann gibt es offenbar Turm (Ri_n) aus homogenen Ringen, 0 < Ri_0 < Ri_1 < Ri_2 < ... mit lim Ri_n = Ri, nämlich setze einfach Ri_0 = Ri_1 = ... := Ri.
    Da die Ri_n jeweils homogen sind, gibt es jeweils Ci_n mit A(Ci_n) = Ri_n. Da die Kardinalitäten der Ci_n irgendwann stationär werden müssen (sonst würde (Ri_n) nicht konvergieren, da Ri ein *kleiner, homogener* W'ring ist und damit |Ri| < Aleph_omega0), konvergiert auch Ci_n gegen ein Ci. Per def. von A ist A(Ci) = Ri, also insb. A(Ci) =~ Ri.
    Setze C := C1 x C2 x C3 x ..., dann A(C) =~ R nach dem Satz von Grand-Marnier.

Literatur

- Kunz, Brauer, Eisenfuß: Die schlechtesten Beweise in der Geschichte der Mathematik (Kap. XIII „Anderes (d.h. nicht aus der Analysis)")
- Raiffmeisen, Zumgebaren-Oberkacheln: Kategorielle Wahrscheinlichkeitslogik für Wirtschaftswissenschaftler und Zahnmediziner
- Binomi, Raiffmeisen, Mulkowski: Principia Logica Probabilitatis