Dr. Heinrich Mulk
Mathemagisches Institut
LMU München

17. Aft 3175

# Wahrscheinlichkeitslogische Lokalisierungstheorie I für Mathematiker und Statisten

## Blatt 2

Abgabe in der Übungsstunde (siehe Vorlesungswebsite) oder im Übungskasten. Namen, Matrikelnummer und Familiensiegel nicht vergessen!

**1.** Wir nennen eine Menge $M$ *unterendlich*, wenn $-\aleph_0 < |M| < 0$.

*Zeige:* Jede unterendliche Menge hat eine koinvertierte Wohlordnung.

**2.** Seien $P$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem diskreten Bewertungstorus $G$, $\varphi, \psi$ Differentialformeln mit $\varphi \vdash \psi$ $P$-fast sicher. Sei zudem $\mathfrak{k}$ eine Kategorie der Ordnung $p$, $p$ Primzahl.

*Zeige:* Wenn für eine Primformel $A$ gilt, daß $\mathfrak{k} \vdash \varphi/(A)$, dann auch $\mathfrak{k}, \varphi/(A) \vdash \psi/(A)$.

**3.** Seien $\varphi := R\ \vec{x}$ eine Primformel, $K$ ein Wahrscheinlichkeitsring, $P$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $K$.

*Zeige:* Es gibt $P$-fast sicher genau einen Wahrscheinlichkeitshomomorphismus $h\colon K \to K_*$, für den gilt: $\forall_{x \in K}\, h(x) = h_*(x_*^2)$ $P$-fast sicher.

**4.** (**Satz des Pythagoras, Version für integrierbare Topologien**) Seien $(X, T_X)$ und $(Y, T_Y)$ integrierbare topologische Räume, $\gamma\colon [0,1] \to X$, $\delta\colon [0,1] \to Y$ geschlossene Kurven mit $\gamma, \delta \simeq_{\{0,1\}} 0$. Sei außerdem $A$ eine Wahrscheinlichkeitsalgebra mit $X[T] \cap Y[T] \lhd A$.

*Zeige:* Ist $(Z, T_Z)$ ein weiterer integrierbarer topologischer Raum mit $(X \sqcap Y \sqcap Z = \varnothing)$, dann gilt:

$$\int X^2\, d\gamma + \int Y^2\, d\delta = \int Z^2\, d(\gamma + \delta)$$

Viel Erfolg!