Dr. Heinrich Mulk
Mathemagisches Institut
LMU München

25. Aft 3176

Algebraische Rekursionstheorie und transfinite Typensysteme über nichteuklidischen Semitopologien

Blatt 1

Abgabe in der Übungsstunde (siehe Vorlesungswebsite) oder im Übungskasten. Namen, Matrikelnummer und Familiensiegel nicht vergessen!

1. Seien $\varphi\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ein Oleomorphismus mit Amalgam, $\alpha \subset \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \to \ldots$ ein transfiniter Typ mit $\alpha \in \Big(\big(\mathrm{dom}(\varphi)^*\big)^\times\Big)^*$.

Zeige:

i. $\varphi^\times(\alpha) \in \mathrm{Ol}_{\aleph_1}(\mathbb{Q})$

ii. $\alpha \circ \varphi^* - \varphi^* \div \frac{1}{2} \ll \alpha$

iii. $\alpha^{-1} \times \alpha$ ist ein φ-Relativismus.

iv. $\alpha \times \alpha^{-1}$ ist ein φ-Subjektivismus.

v. $\mathrm{im}(\frac{\varphi^* \times \varphi^\times}{\alpha})$ ist nicht offen bezüglich der von α aufgespannten Semitopologie $\frac{1}{2}T$.

vi. $\frac{1}{2}T$ ist nichteuklidisch.

2. Sei $\mathbb{N}_\perp = \mathbb{N} \cup \{\perp\}$. Sei weiters $M_{\mathrm{ggT}}\colon \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\{n\} \times \mathbb{N}^n)\right) \to \mathbb{N}_\perp$ eine Turingmaschine, die den ggT beliebig (aber nur endlich) vieler Eingabezahlen berechnet. Berechnen Sie die Semitopologie $\frac{1}{2}T$, die von $\mathrm{type}(M_{\mathrm{ggT}})$ aufgespannt wird und beweisen Sie, daß M_{ggT} bezüglich $\frac{1}{2}T$ die Diamanteigenschaft besitzt.

3. Sei Ty ein Typensystem 1. Ordnung mit $(\mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \to \ldots) \in \mathrm{Ty}$, $(\ldots \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}) \notin \mathrm{Ty}$. Zeigen Sie, daß Ty einen trivialen Superschnitt hat.

4. Sei $X = \mathbb{N}^{\mathbb{Q}}$ mit der natürlichen Typentopologie.

i. Geben Sie einen echt transfiniten Algorithmus über X an, der nicht NP-vollständig ist.

ii. Warum widerspricht die Existenz solcher Algorithmen nicht dem Satz von Grand-Manier?

Viel Erfolg!